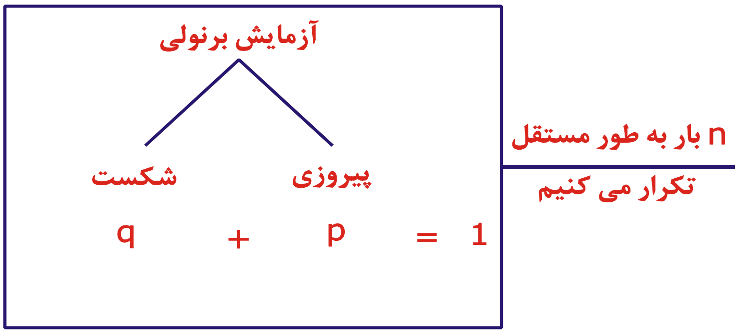
توزیع دوجمله‌ای:

یک آزمایش برنولی را n بار به طور مستقل تکرار می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه k بار پیروزی بیاید.



در این حالت نیز مانند مثالهای پیش می‌توانیم پیشامد آمدن k بار پیروزی را به حالتهای ناسازگار افراز کـرد. (پ برای پیروزی و ش برای شکست).

k بار پیروزی = $\underbrace{\text{(پ و پ و ... و پ}}_{(k)\ \text{بار}}$ و $\underbrace{\text{ش و ش و ... و ش)}}_{(n\text{-}k)\ \text{بار}}$ یا

$\vdots$

= $\underbrace{\text{(پ و ... پ و پ}}_{(k)\ \text{بار}}$ و $\underbrace{\text{ش و ... و ش و ش)}}_{(n\text{-}k)\ \text{بار}}$

P(k بار پیروزی) تعداد حالتها $\times P^k q^{n-k}$

تعداد حالتها عبارت است از تعداد حالتهایی که بتوان از بین n دایره

k دایره انتخاب کرد و در آن «پ» و در بقیه «ش» نوشت، که این تعداد با توجه به مباحث ترکیب برابر $\binom{n}{k}$ است

پس:

$$P\,(k \text{ بار پیروزی}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

مثال.

یک کارخانه تولیدکننده وسایل برقی، به مدت شش‌ماه ضمانت می‌کند. در یک هفته ۱۶ دستگاه از این وسایل به فروش رفته است. احتمال پیشامدهای زیر را حساب کنید: (احتمال آن که کالایی در مدت ضمانت احتیاج به تعمیر دارد، برابر ۰/۲ است)

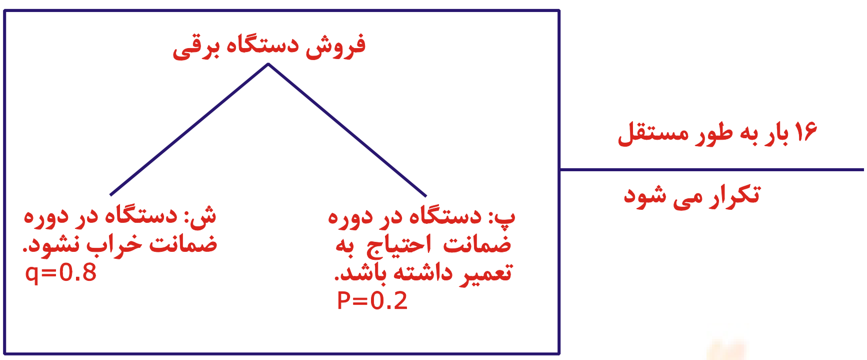
A: هیچ‌یک از این دستگاه‌ها در دوره ضمانت خراب نشوند.

B: حداقل یکی از دستگاه‌ها در دوره ضمانت خراب شود.

C: ۷ دستگاه در دوره ضمانت خراب شود.

حل.

در این مثال، آزمایش برنولی زیر ۱۶ بار به طور مستقل تکرار شده است.



$$P(A) = P\,(\text{تعداد پیروزیها برابر ۰}) = \binom{16}{0}(0.2)^0(0.8)^{16} = (0.8)^{16}$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - (0.8)^{16}$$
$$P(C) = \binom{16}{7} (0.2)^7 (0.8)^9$$

مثال.

قرار است هر قوطی کبریت دارای ۵۰ عدد چوب کبریت باشد، اما عملاً دیده شده است که چنین نیست و بعضی از قوطیها کمتر از ۵۰ عدد چوب کبریت دارند، در یک بررسی معلوم شده است که از هر ۱۰۰ قوطی کبریت ۲۳تـای آن کمتر از ۵۰ عدد چوب دارد. اگر دو جین کبریت خریده باشیم، احتمال آن که:

A: همه آنها ۵۰ عدد چوب کبریت داشته باشند چقدر است؟

B: ۷ عدد کمتر از ۵۰ عدد چوب کبریت داشته باشد چقدر است؟

حل.

پیروزی را در این آزمایش برنولی، داشتن ۵۰ عدد چوب کبریت در قوطی خریداری شده تعریف می‌کنـیم.

بنابراین:

$$P(A) = P(\text{۱۲ پیروزی در ۱۲ تکرار}) = \binom{12}{12} (0.23)^{12} (0.77)^0 = (0.23)^{12}$$

$$P(B) = P(\text{۵ پیروزی}) = \binom{12}{5} (0.23)^5 (0.77)^7$$

مثال.

۸۰ درصد تیرهای یک تیرانداز به هدف برخورد می‌کند. این تیرانداز ۸ تیر به سمت هدفی شلیک می‌کند. احتمال آن که ۶ تای آن به هدف اصابت کند، چقدر است؟

حل.

در این تمرین نیز، یک آزمایش برنولی ۸ بار به طور مستقل تکرار می‌شود. مـی‌خـواهیم تعـداد پیروزیهـا ۶

باشد، پس:

$$P(\text{پیروزی } 6) = \binom{8}{6}(0.8)^6(0.2)^2$$

مثال.

یک سکه نااریب را پنج بار مستقلاً می‌اندازیم. احتمال اینکه دو شیر و سه خط مشاهده شود چقدر است؟

حل.

فرض کنید x تعداد شیرها باشد. واضح است که $X \sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$ می‌خواهیم $P(X=2)$ را پیدا کنیم. با استفاده از چگالی x داریم:

$$P(x=2)=f\left(2,5,\frac{1}{2}\right)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}$$
$$=(10)\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}$$

حال که متغیر دوجمله‌ای را تکرار برنولی تعریف کردیم، با افزایش x چه تغییراتی در احتمال $P(X=k)$ روی می‌دهد؟

می‌خواهیم برای $x=n$ داده شده بدانیم هر کدام k احتمال p ماکزیمم است، واضح است که $k=0$ و k $=n$ احتمالهای کوچکی را نسبت به بقیه خواهند داشت چون حالاتی هستند که همه را یا باید ببریم یا ببازیم و دو حالت معمولی چنین چیزی احتمال کمی دارد مگر زمانی که p برد خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد.

پس قضیه به این صورت است که:

اگر X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p)، $0 < p < 1$ باشد، آن‌گاه وقتی X از 0 تا n تغییر می‌کند، $P(X=k)$ ابتدا بطور یکنوا صعود می‌کند و سپس بطور یکنوا نزول خواهد کرد و وقتی به ماکزیمم خود می‌رسد که k بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $p(n+1)$ باشد.

برهان: حکم را با توجه به مقدار $P(X=k)/(X=k-1)$ ثابت می‌کنیم و معین می‌کنیم که بـه ازای چه مقادیر k بزرگتر یا کوچکتر از ۱ خواهد بود.

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=\frac{\frac{n!}{(n-k)!k!}p^k(1-p)^{n-k}}{\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}p^k(1-p)^{n-k+1}}=\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$$

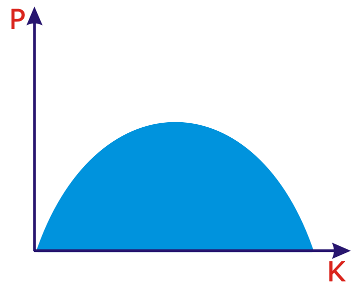
بنابراین $P\{X=k\}\geq P\{X=k-1\}$ اگر و فقط اگر

$$(n-k+1)p\geq k(1-p)$$

به عبارت معادل اگر و فقط اگر

$$k\leq(n+1)p$$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. می‌تواند نمودار احتمال را نسبت به k این‌گونه فرض کنیم



یک راه کامپیوتری جالب برای محاسبه تابع متغیر تصادفی دوجمله‌ای:

می‌دانیم

$$P(X=J)=\binom{n}{J}p^J(1-p)^{n-J}$$

$$=\frac{n(n-1)\dots(n-J+1)}{J(J-1)\dots1}p^J(1-p)^{n-J}$$

با رابطه‌های بازگشتی هم به اندازه کافی آشنایی داریم.

اکنون رابطه‌ای بازگشتی را معرفی می‌کنیم که $P(X=k+1)$ را براساس $P(X=k)$ به ما می‌دهد:

فرض کنید X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای (n, p) باشد. برای محاسبه تابع متغیر تصادفی دوجمله‌ای زیر به صورت بازگشتی:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

از رابطه زیر بین $P(X=k+1)$ و $P(X=k)$ استفاده می‌کنیم:

$$P(X=k+1)=\frac{p}{1-p}\frac{n-k}{k+1}P(X=k)$$

اثبات این رابطه را چطور است در ایکی ثانیه به صورت استقرایی خودتان انجام دهید.

راهنمایی: برای اثبات این فرمول کافی است جای $P(X=k)$ فرض استقرا یعنی $\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$ را قرار دهید و سعی کنید $p(X=k+1)$ را ایجاد کنید.

مثال.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با پارامترهای $n=6$ و $p=0.4$ باشد.

$P(X=0)$ را که به عنوان شروع حساب کنیم، $(0.6)^{4}$ می‌شود، حال با کمک رابطه بازگشتی فوق این احتمالها را می‌توان از این طریق بدست آورد:

$$P(X=0)=(0.6)^6=0.467$$

$$P(X=1)=\frac{4}{6}\frac{6}{1}P(X=0)=0.1865$$

$$P(X=2)=\frac{4}{6}\frac{6}{2}P(X=1)=0.311$$

$$P(X=3)=\frac{4}{6}\frac{6}{2}P(X=2)=0.2765$$

$$P(X=4)=\frac{4}{6}\frac{3}{4}P(X=3)=0.138$$

$$P(X=5)=\frac{4}{6}\frac{2}{3}P(X=4)=0.037$$

$$P(X=6)=\frac{4}{6}\frac{1}{6}P(X=5)=0.004$$

چند سؤال ساده جهت تمرین بیشتر

مثال.

در یک چهار راه چراغ سبز ۱۵ ثانیه و چراغ زرد ۵ ثانیه و چراغ قرمز ۳۰ ثانیه وام دارد. راننده‌ای ده بار در روز بین ساعت ۸ تا ۹ از این چهار راه عبور می‌کند. احتمال اینکه درست سه بار در روز به چراغ قرمز برخورد کند چقدر است؟

حل.

هر بار که این راننده از چهار راه عبور می‌کند، برخورد با چراغ قرمز معادل با پیروزی در یک آزمایش برنولی با پارامتر زیر معین می‌شود.

$$P=\frac{30}{15+5+30}=0.6$$

یعنی احتمال برخورد هر بار با چراغ قرمز ۰/۶ = p است.

تعداد دفعاتی که در روز با چراغ قرمز برخورد می‌کند متغیر تصادفی دوجمله‌ای می‌باشد. با استفاده از فرمول داریم:

$$P(X=3)=\binom{10}{3}0.6^3 0.4^7$$

مثال.

یک آزمون ریاضی مرکب از ۱۵ تست چهار پرسشی است که در هر تست تنها یک پرسش درست می‌باشد. شخص بدون آمادگی لازم در این امتحان شرکت می‌کند و تست‌ها را شانسی پاسخ می‌دهد.

احتمال اینکه لااقل ۵ تست را درست پاسخ دهد چقدر است؟

حل.

پاسخ دادن درست به هر تست معادل با یک آزمایش برنولی با پارامتر $P=\frac{1}{4}$ می‌باشد. پاسخهای درست از متغیر تصادفی پیروی می‌کند. می‌خواهیم $P(X\geq 5)$ را حساب کنیم.

$$P(X\geq 5)=\sum_{k=5}^{15}\binom{15}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$$

که حل این فرمول و پیدا کردن فرمول صریح‌تر برای آن خارج از حوصله این بحث است یعنی تا همین‌جا برای شما کافی است!

مثال.

یک ۶ وجهی که ۲ سطح آن آبی و ۳ سطح آن قرمز است را ۷ بار پرتاب می‌کنیم، مطلوبست محاسبه احتمال آنکه

(الف) ۲ بار آبی و ۴ بار قرمز بیابد.

(ب) یکبار قرمز و حداکثر ۳ بار آبی بیابد.

حل.

فرض کنید E_1 پیشامد سطح آبی، E_2 پیشامد سطح قرمز و E_3 پیشامد نه آبی و نه قرمز باشد.

در این صورت

$$P(E_1)=\frac{2}{6}\ ,\ P(E_2)=\frac{3}{6}\ ,\ P(E_3)=\frac{1}{6}$$

(الف)

$$\frac{7!}{2!\ 4!\ 1!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^1$$

(ب)

$$P(X_1=1\ ,\ X_2=r\le 3\ ,\ X_3=7-1-r)=$$
$$=\sum_{r=0}^{3}\frac{7!}{1!\ r!\ (6-r)!}\left(\frac{3}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^r\left(\frac{1}{6}\right)^{6-r}$$

نکته: چرا به این توزیع دوجمله‌ای می‌گویند؟!

کلمه دوجمله‌ای یا بینومیال که به این توزیع اطلاق می‌شود بدین جهت است که جملات این توزیع با جملات بسط $(q+p)^n$ مربوط می‌باشد.

$$(q+p)^n=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

مثال.

احتمال اینکه تیر اندازی، تیر خود را به هدف بزند $\frac{3}{4}$ است احتمال اینکه از چهار تیری که شلیک خواهد کرد دقیقاً دو تیر به هدف بخورد چقدر است؟

حل.

اگر موفقیت را به هدف خوردن در نظر بگیریم، آنگاه

۱. آزمایش ۴ بار تکرار شده است.

۲. آزمایش‌ها مستقل از یکدیگرند.

۳. نتیجه هر آزمایش موفقیت یا شکست می‌باشد.

۴. احتمال موفقیت در هر آزمایش ثابت و برابر $\frac{3}{4}$ می‌باشد.

پس آزمایش دو جمله‌ای با $p=\frac{3}{4}, n=4$ تعریف می‌کنیم

$$P(X=x)=\binom{4}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{4-x} \quad , \; x=0,1,2,3,4$$

و

$$p(X=2)=\frac{27}{128}$$

برای محاسبه احتمالهای حداقل r موفقیت و یا حداکثر r موفقیت $P(X\geq r)$، $p(X\leq r)$ و یا احتمال اینکه تعداد موفقیت دقیقاً برابر r باشد و یا تعداد موفقیت بین دو عدد داده شده باشد از فرمولهای زیر استفاده می‌کنیم.

(۱) $P(X\leq r)=\sum\limits_{x=0}^{r}P(X=x)$

(۲) $P(X\geq r)=1-P(X<r)=1-\sum\limits_{x=0}^{r-1}P(X=x)$

(۳) $P(X=r)=\sum\limits_{x=0}^{r}P(X=x)-\sum\limits_{x=0}^{r-1}P(X=x)$

(۴) $P(a\leq X\leq b)=\sum\limits_{x=0}^{b}P(X=x)-\sum\limits_{x=0}^{a-1}P(X=x)$

مثال.

خانواده‌ای دارای ۵ فرزند است. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه

(الف) حداقل ۲ فرزند پسر وجود داشته باشد.

(ب) حداکثر ۲ فرزند پسر وجود داشته باشد.

حل.

فرض کنید متغیر تصادفی X نشان‌دهنده تعداد پسر در خانواده باشد.

نوع توزیع این متغیر تصادفی، دوجمله‌ای با پارامترهای $n=5\ ,\ p=\frac{1}{2}$ می‌باشد.

$$P\left(X=x\right)=\binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}\ ,x=0,1,2,3,4,5$$

(الف)

$$P\left(X\geq 2\right)=1-P\left(X\leq 1\right)=1-\sum_{x=0}^{1}P\left(X=x\right)$$
$$=1-0.188=0.812$$

(ب)

$$P\left(X\leq 2\right)=\sum_{x=0}^{2}P\left(X=x\right)=0.5$$

مثال.

یک تست دارای ۱۵ سؤال است که هر سؤال دارای چهار جواب احتمالی بوده که فقط یکی از آنها جواب درست است. شخصی بطور شانسی علامت می‌زند، مطلوبست محاسبه احتمال اینکه به ۵ تا ۱۰ سؤال جواب درست بدهد.

حل.

نوع آزمایش دو جمله‌ای با پارامترهای $p=\frac{1}{4}$ و $n=15$

$$P(X=x)=\binom{15}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{15-x} \quad ,x=0,1,2,\ldots,15$$

$$\text{احتمال مطلوب}=\sum_{x=5}^{10}P(X=x)=\sum_{x=5}^{10}\binom{15}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{15-x}$$

مثال.

یک تاس طوری اریب شده که احتمال وقوع عدد زوج سه برابر فرد است، اگر این تاس را ۱۵ مرتبه پرتـاب کنـیم، مطلوبست محاسبه احتمال اینکه

(الف) دقیقاً دو شش ظاهر شود.

(ب) حداکثر دو شش ظاهر شود.

حل.

می‌دانیم $S=\{1,2,3,4,5,6\}$، اگر به اعداد فرد وزن w را نسبت دهیم وزن نقاط زوج ۳w خواهد بـود، بنابراین

$$w+3w+w+3w+w+3w=1\Rightarrow w=\frac{1}{12}$$

و احتمال وقوع عدد زوج $\frac{3}{12}$ یا $\frac{1}{4}$ است. نوع توزیع این آزمایش دو جمله‌ای با پارامترهای $p=\frac{1}{4}$ و $n=15$ می‌باشد. اگر متغیر تصادفی X تعداد شش‌های ظاهر شده باشد، داریم:

$$P(X=x)=\binom{15}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{15-x} \quad ,x=0,1,\ldots,15$$

(الف)

$$P(X=2)=\sum_{x=0}^{2}P(X=x)-\sum_{x=0}^{1}P(X=x)$$

که با عددگذاری داریم $=0.2361-0.0802=0.1559$

ب) که اگر محاسبه کنیم داریم:

$$P\left(X \le 2\right) = \sum_{x=0}^{2} P\left(X = x\right) = 0.2361$$